

Significato fisico e misura di $Af\rho$

Albino Carbognani, PhD

INAF-Osservatorio di Astrofisica e Scienza dello Spazio di Bologna

Stazione osservativa di Loiano

Versione del 22 settembre 2020

Le comete sono corpi celesti primordiali molto complessi e il loro studio è fondamentale per una migliore comprensione dei meccanismi di formazione planetaria. Nonostante ciò si tratta di corpi poco conosciuti. Ci sono circa 3000 comete di lungo periodo, scoperte dal 1801 fino ai giorni nostri, e la metà ha orbite paraboliche dovute semplicemente al piccolo arco osservato (tipicamente fra 1 e 3 giorni), Betzler et al., 2020. In questa breve nota vediamo come si possa caratterizzare – dal punto di vista osservativo – l'emissione di polvere di una cometa.

Spettri cometari

Lo spettro della chioma di una cometa ha due componenti sovrapposte, una **continua** e una in **emissione** (Fig. 1):

1. Lo **spettro continuo** è dovuto alla radiazione solare riflessa dalle particelle di polvere presenti nella chioma.
2. Lo **spettro in emissione**, che mostra delle **bande in emissione**, è dovuto a un meccanismo di fluorescenza della radiazione solare da parte delle molecole di OH, CN, C₂, C₃ e altre, presenti nella chioma. Queste molecole sono il risultato della scissione delle molecole progenitrici di cui è composto il nucleo che vengono emesse nello spazio a causa della sublimazione dei materiali volatili superficiali.

L'intensità di queste **due componenti** può essere debole, normale o forte. In alcuni casi eccezionali il continuo o le bande di emissione possono essere assenti.

Nella maggior parte degli spettri cometari, tolto il radicale OH che proviene dalla dissociazione delle molecole d'acqua sublimato dal nucleo, dominano le bande del CN, in altre invece le **bande di Swan** del C₂¹. Queste bande di emissione dominano lo spettro cometario fra 470 e 563,5 nm (nella regione ciano-verde del visibile). Al contrario, le bande del CN sono poste nel violetto dello spettro, attorno a 380 nm, mentre l'emissione dell'OH è nell'ultravioletto vicino attorno a 309 nm.

L'analisi del continuo cometario

Per lo studio fotometrico della chioma di polvere delle comete – ossia della **parte continua dello spettro** – nel 1984 è stata introdotta la quantità $Af\rho$ (A'Hearn et al., 1984). Si tratta del prodotto dell'albedo A della chioma della cometa (di cui dopo vedremo la definizione), del fattore di riempimento f da parte dei grani di

¹ Le bande di Swan sono chiamate così in onore del fisico scozzese William Swan (1818-1894), il primo a studiare lo spettro della molecola di C₂ nel 1856.

polvere entro l'area del campo di vista di raggio ρ con il raggio medesimo. A prima vista sembra una quantità contro-intuitiva da determinare ma, come vedremo più avanti, **l'uso di $Af\rho$ è stato introdotto perché – sotto certe ipotesi – si dimostra che questa quantità è indipendente dallo strumento e dal campo di vista considerato.** In questo modo diventa più facile il confronto fra le misure fatte da diversi osservatori tanto è vero che viene universalmente usato tutte le volte che si vuole **studiare il continuo determinato dalle polveri** (Fink e Rubin, 2012). La misura di $Af\rho$ deve essere fatta usando i filtri fotometrici Rc o Ic, in modo da **escludere la maggior parte delle righe in emissione dovute alla componente gassosa** presente nella chioma così da lasciare solo il continuo solare riflesso dalla polvere. Vediamo più in dettaglio il significato fisico delle componenti, quali ne sono i limiti e come si calcola $Af\rho$ in pratica.

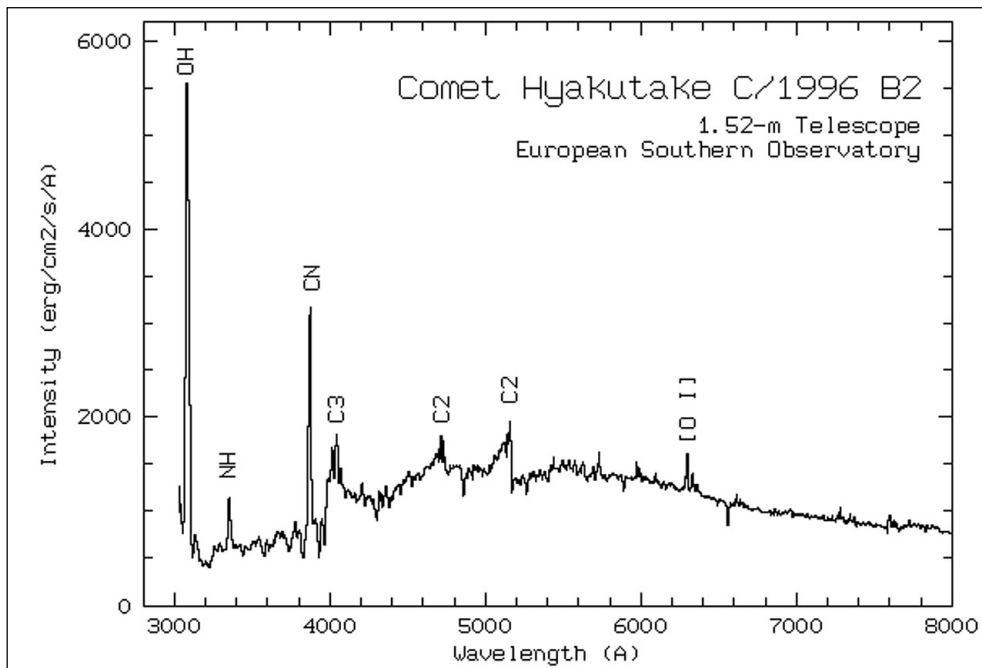


Figura 1 - Spettro ottico della cometa Hyakutake ripreso l'8 marzo 1996 dall'ESO. La riga più intensa è quella del radicale OH a 309 nm, dovuta alla dissociazione delle molecole d'acqua sublimata dal nucleo. Visibili in emissione anche il CN, il C₂ e il C₃. Il continuo sottostante è lo spettro del Sole riflesso dalla polvere della chioma, infatti, fra le bande di emissione del CN e del C₃ si vedono le righe in assorbimento H e K del calcio una volta ionizzato. Notare come verso la parte rossa dello spettro le emissioni dovute al gas siano molto deboli rispetto al continuo, mentre sono più intense verso il blu. Per questo motivo, per caratterizzare l'emissione di polveri, si usano filtri R o I, in grado di tagliare la parte blu dello spettro dove abbondano le emissioni dei gas cometari (ESO).

Il fattore di riempimento f

Supponiamo che i granelli di polvere presenti nella chioma della cometa abbiano una **sezione geometrica media** con area pari a σ . Il fattore di riempimento f del campo di vista alla distanza ρ dal nucleo (Fig. 2), è la frazione di spazio occupata da tutti i granelli di polvere e sarà dato da (A'Hearn et al., 1984):

$$f = \frac{N(\rho)\sigma}{\pi\rho^2} \quad (1)$$

Nella Eq. (1) $N(\rho)$ è il numero di tutte le particelle visibili entro la distanza ρ dal nucleo, mentre $\pi\rho^2$ è l'area del campo di vista. Il fattore di riempimento f è adimensionale, ed è un numero compreso fra 0 (niente polvere) e 1 (i granelli di polvere saturano il campo di vista).

Albedo di una chioma cometaria

L'albedo A della chioma di una cometa **non** è il semplice rapporto fra radiazione riflessa e incidente che si definisce per i corpi solidi (noto come albedo di Bond). La chioma di una cometa infatti è un **corpo semitrasparente** e una parte della radiazione solare la attraverserà senza subire assorbimento o riflessione. Per questo motivo l'albedo A per la chioma di una cometa è definito come (A'Hearn et al., 1984):

$$A = \frac{\text{Luce riflessa dalla chioma}}{\text{Luce tolta dal flusso solare}} \equiv \frac{L_R}{L_T} \quad (2)$$

Il valore dell'albedo A è considerato costante per la chioma – fissato l'angolo di fase con cui si osserva la cometa - ed è una quantità adimensionale (ossia un numero puro).

Flusso di radiazione di una cometa

La radiazione tolta dalla chioma dal flusso solare entro il campo di vista ρ sarà quella che viene intercettata dai grani di polvere quindi, per la Eq. (2), la radiazione totale riflessa dalla chioma sarà data da:

$$L_R = AL_T = AN(\rho)\sigma \frac{F_{sun}}{r^2} \quad (3)$$

Nella Eq. (3), $F_{sun} = 1361 \text{ W/m}^2$ è il flusso della radiazione solare a 1 UA, mentre r è la **distanza eliocentrica della cometa misurata in UA** (Unità Astronomiche, 1 UA = 149,6 milioni di km). Se la componente di polveri nella chioma riflette la radiazione solare **in modo isotropo**, il flusso di radiazione che si riceve a Terra sarà dato da:

$$F_c = \frac{L_R}{4\pi\Delta^2} \quad (4)$$

Sostituendo la Eq. (3) nella Eq. (4) si trova:

$$Af = 4r^2 \left(\frac{\Delta}{\rho}\right)^2 \frac{F_c}{F_{sun}} \quad (5)$$

La quantità Af della Eq. (5) è adimensionale perché r è **misurato in UA**, mentre le dimensioni di distanze e flussi si semplificano fra di loro nei rapporti.

La quantità $Af\rho$ come caratterizzazione dell'attività cometaria

Il modello più semplice per la chioma di polveri di una cometa è un modello a **simmetria sferica**, con le particelle che si muovono verso l'esterno a **velocità costante** (Fig. 2). In questo scenario il numero di particelle per unità di volume, $n_{vol}(r)$, è inversamente proporzionale al quadrato della distanza r dal nucleo, ossia (Fink e Rubin, 2012):

$$n_{vol}(r) = \frac{Q_d}{4\pi v_d} \frac{1}{r^2} \quad (5a)$$

Nella Eq. (5a) Q_d è il **tasso di produzione di polvere** (particelle/s), mentre v_d è la **velocità terminale** di allontanamento dal nucleo delle particelle, ossia la **velocità dopo il disaccoppiamento con il gas che le ha**

espulse nello spazio. Le velocità tipiche di allontanamento dei granelli di polvere vanno da 1 m/s per le particelle più grandi ($10^4 \mu\text{m}$) fino a 300 m/s per quelle più piccole, con dimensioni dell'ordine di $1 \mu\text{m}$. La velocità terminale che compare nella Eq. (5a) viene raggiunta entro alcune decine di km dal nucleo. Dal punto di vista fisico, la Eq. (5a) esprime semplicemente la **conservazione della massa** per le particelle di polvere espulse dal nucleo. Infatti, deve valere la relazione di conservazione: $Q_d = 4\pi r^2 v_d n_{vol}$. Il corrispondente numero di **particelle per unità di superficie** che si vede lungo la **linea di vista** z posta a una distanza ρ dal nucleo sarà (vedi Fig. 2):

$$n(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{vol}(r) dz = \frac{Q_d}{4\pi v_d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\rho^2 + z^2} = \frac{Q_d}{4v_d} \frac{1}{\rho} \quad (5b)$$

In questo modello a simmetria sferica della chioma la **densità delle particelle lungo la linea di vista** dell'osservatore **decresce come $1/\rho$** . Continuando con questo modello, il numero totale di particelle $N(\rho)$ visibili nel piano del cielo entro una distanza ρ dal nucleo **aumenta linearmente con ρ** . Infatti, integrando $n(\rho)$ fra il nucleo cometario e il limite del campo di vista ρ si trova:

$$N(\rho) = \int_0^\rho n(\rho) 2\pi\rho d\rho = \int_0^\rho 2\pi\rho \frac{k}{\rho} d\rho = 2\pi k\rho \propto \rho \quad (6)$$

Con $k = Q_d/4v_d$. Se $N(\rho) \propto \rho$ allora, per l'Eq. (1), $f \propto 1/\rho$ quindi $Af \propto 1/\rho$ e ne deriva che $Af\rho \equiv \text{costante}$. La quantità $Af\rho$ è quindi una **costante della cometa**, ossia è **indipendente dal valore di ρ** , e ha le dimensioni di una lunghezza. Se il valore di σ e quello della velocità terminale v_d delle particelle emesse resta costante, la variazione di $Af\rho$ **caratterizza il tasso di emissione di polveri di una cometa**:

$$Af\rho = 4r^2 \left(\frac{\Delta}{\rho}\right)^2 \frac{F_c}{F_{sun}} \rho = A \frac{Q_d \sigma}{2v_d} = \text{cost} \quad (7)$$

Fisicamente $Af\rho$ può essere visto un po' come il **raggio equivalente di un corpo solido in grado di riflettere l'intera radiazione solare della chioma**. Infatti se $A = f = 1$, allora $Af\rho = \rho$. Attenzione che nel terzo membro della Eq. (7) – quello che contiene Q_d – si è assunto una dimensione media per le particelle e un albedo A costanti. In realtà bisognerebbe tenere conto della distribuzione di massa delle particelle di polvere e della funzione di scattering della radiazione, che cambia in funzione delle dimensioni dei granelli e della lunghezza d'onda. Per questo motivo stimare Q_d con la Eq. (7) è un modello troppo semplificato della realtà (Fink e Rubin, 2012). Il secondo membro della Eq. (7) invece è proprio la definizione osservativa di $Af\rho$ ed è quella che si usa in pratica al telescopio.

Se $Af\rho$ aumenta nel tempo vuol dire che sono aumentate o le dimensioni delle particelle di polvere (ossia σ), oppure il loro numero $N(\rho)$, o entrambe queste quantità. In questi casi è possibile che si tratti di un outburst di attività del nucleo. Quindi la misura di $Af\rho$ permette di rendere in un certo senso quantitativa l'attività del nucleo cometario attraverso l'osservazione della radiazione solare diffusa dalle polveri.

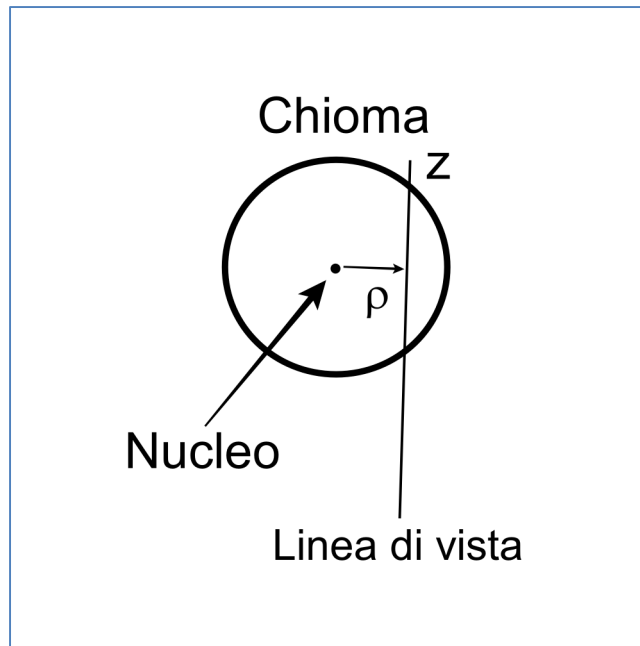


Figura 2 – Geometria relativa alla chioma di polveri di una cometa con campo di vista di raggio ρ . L'osservatore si trova in basso, lungo la direzione della linea di vista z .

Andamento di $Af\rho$ in funzione dell'angolo di fase

Quanto detto vale se si fissa l'angolo di fase. In realtà, a parità di altre condizioni, la quantità $Af\rho$ **aumenta monotonamente al diminuire dell'angolo di fase α della cometa** (angolo Sole-cometa-Terra), con un aumento che inizia ad essere sensibile al di sotto dei 20° e un **picco ad angolo di fase zero**. Questo accade perché l'efficienza di **scattering** della radiazione da parte della polvere è massima quando la si osserva frontalmente (**backscattering**) e questo aumenta il valore di A definito dalla Eq. (2). Sono le deviazioni dall'andamento monotono di $Af\rho$ in funzione dell'angolo di fase che denunciano outburst cometari in grado di immettere nuove particelle di polvere nella chioma (vedi Fig. 3). Per compensare l'aumento in funzione della fase si può correggere $Af\rho$ in modo da ricondurlo all'angolo di fase $\alpha = 0^\circ$ (Betzler et al., 2020):

$$Af\rho(0^\circ) = \frac{Af\rho}{\varphi(\alpha)} \quad (8)$$

Dove la **funzione per la correzione della fase** è data da:

$$\varphi(\alpha) = 10^{-\beta\alpha/2,5} \quad (9)$$

Con $\beta = 0,04$ mag/grado (Jewitt e Luu, 1989).

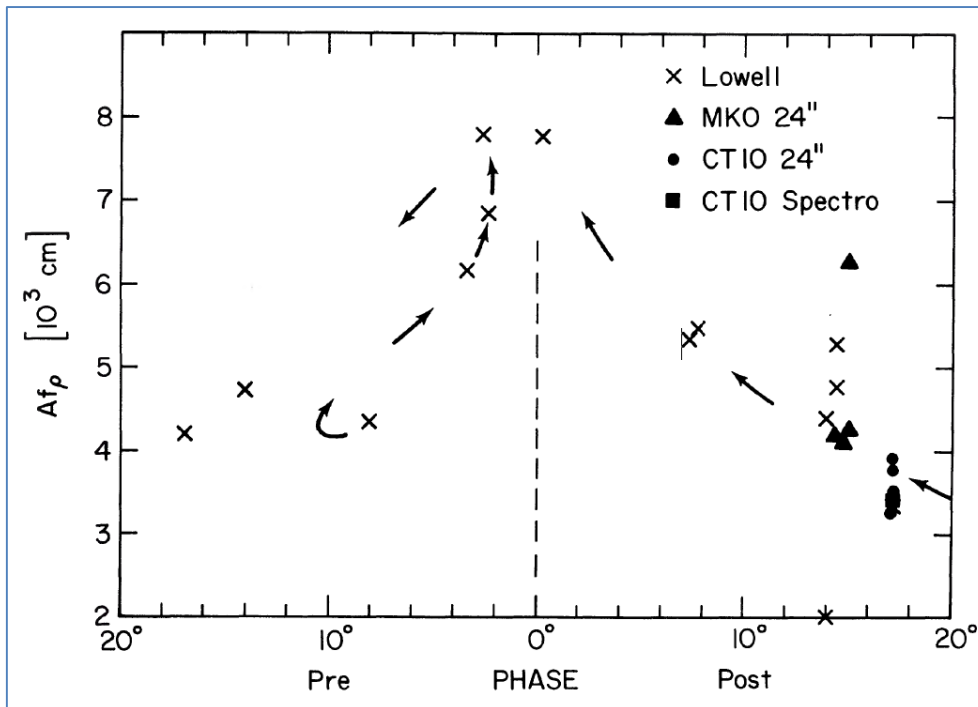


Figura 3 – Variazione di A_{fp} in funzione dell'angolo di fase per diverse apparizioni della cometa C/1980 E1 (Bowell). Le date prima del perielio sono a sinistra dell'angolo di fase 0° . Le frecce indicano la progressione nel tempo. I dati suggeriscono che, per un dato angolo di fase, la cometa era più attiva nell'inverno 1981-1982 rispetto all'inverno 1980-1981, probabilmente a causa del rilascio di nuovi grani di polvere. Si nota un outburst post-perielio nell'aprile 1982. A parte queste fluttuazioni, l'effetto dovuto all'angolo di fase è evidente. Il picco di backscattering appare circa 3 volte lo scattering a fasi più moderate, nel range $30\text{-}90^\circ$, dove lo scattering è quasi indipendente dall'angolo di fase (A'Hearn et al., 1984).

Limiti di A_{fp}

Sebbene la quantità A_{fp} sia estremamente utile per la descrizione del continuo delle comete, presenta alcune limitazioni (Fink e Rubin, 2012). Per prima cosa – per avere senso - richiede che la chioma sia a simmetria sferica, ossia che abbia estensione uguale in tutte le direzioni. Si presume anche che non vi sia produzione o distruzione di granelli di polvere dopo che hanno lasciato il nucleo, e che la polvere abbia una velocità di flusso costante. Non ha senso calcolare A_{fp} nella gamma di distanze $1\text{-}20$ km circa dalla superficie cometaria, dove la **polvere è ancora accoppiata al gas** e non ha ancora raggiunto la sua velocità terminale. Inoltre fallisce lontano dal nucleo, a distanze dell'ordine di 10^5 km, dove la **pressione della radiazione solare** spinge la polvere a formare la coda di polveri della cometa. La descrizione tramite A_{fp} può essere compromessa se c'è una forte attività da parte dei getti di gas e polveri del nucleo e la chioma è asimmetrica. Probabilmente non è una quantità molto appropriata per descrivere la chioma delle comete che si allontanano dal Sole e si trovano a grandi distanze eliocentriche. In questo caso la maggior parte della polvere della chioma potrebbe essere catturata da particelle di grandi dimensioni rimaste ad orbitare attorno al nucleo su orbite kepleriane (Fink e Rubin, 2012).

Grosso modo, si stima che per circa il 50% delle comete la **densità superficiale delle particelle di polvere nella chioma interna** decresca come $1/p$, mentre per il rimanente le deviazioni ci sono ma non sono estreme. Per questo motivo, A_{fp} resta una buona caratterizzazione - al primo ordine - dell'involuppo di polvere della chioma interna delle comete.

Esempio

Il 18 agosto 2020 la cometa non periodica C/2017 K2 era a 8,36 AU dalla Terra e a 8,46 AU dal Sole. La magnitudine apparente in R_c , misurata entro un raggio ρ di 14,5 arcsec dal nucleo, era $m_c = +15,5$. Calcolare il corrispondente valore di $Af\rho$.

Assumiamo che non ci siano particelle macroscopiche in orbita attorno al nucleo della cometa in grado di catturare le particelle di polvere più piccole in allontanamento dal nucleo. Dalla Eq. (7) si vede che, per prima cosa, bisogna calcolare il rapporto fra il flusso della radiazione in R_c riflesso verso la Terra dalla chioma della cometa e quello del flusso solare a 1 UA. Dalla relazione di Pogson si ha:

$$m_c - m_{sun} = -2,5 \log_{10} \left(\frac{F_c}{F_{sun}} \right) \quad (10)$$

Da cui si ottiene:

$$\frac{F_c}{F_{sun}} = 10^{\frac{m_{sun} - m_c}{2,5}} \quad (11)$$

Prendendo il valore della magnitudine apparente del Sole in R_c ($m_{sun} = -27,15$), il rapporto fra i flussi cometa/Sole dato dalla Eq. (11) risulta: $8,71 \cdot 10^{-18}$. Sostituendo questo rapporto nella Eq. (7) e tenendo conto che $r = 8,46$ UA, $\Delta = 1,251 \cdot 10^{12}$ m e $\rho = 14,5$ arcsec $\equiv 7,93 \cdot 10^7$ m, si trova $Af\rho = 49$ m = 4900 cm. Questo valore è simile a quello posseduto dalla cometa non-periodica C/1980 E1 (Bowell) quando era alla distanza di circa 3,4 UA dal Sole (A'Hearn et al., 1984).

Andamento qualitativo di $Af\rho$ in funzione di ρ

Nella sezione sui limiti di $Af\rho$ abbiamo detto che, quando le particelle di polvere vengono accelerate dalla pressione della radiazione solare per andare a formare la coda omonima, $Af\rho$ non è più una costante indipendente da ρ . Ora vogliamo stimare la dipendenza di $Af\rho$ dal campo di vista per una chioma a **simmetria radiale** in cui le **particelle di polvere sono uniformemente accelerate**.

Per semplificare supponiamo che le particelle di polvere della chioma abbiano una velocità iniziale nulla e che al tempo $t = 0$ vengano accelerate in modo costante con accelerazione a . In questo caso la velocità alla distanza r dal nucleo non sarà più costante ma data da:

$$v_d = \sqrt{2ar} \quad (12)$$

Imponendo sempre la conservazione della massa, il numero di particelle per unità di volume alla distanza r dal nucleo, sarà:

$$n_{vol}(r) = \frac{Q_d}{4\pi\sqrt{2ar}^{5/2}} \quad (13)$$

L'Eq. (13) è l'equivalente della Eq. (5a), valida per chiome a simmetria sferica ma con i grani che si muovono a velocità costante. Integrando lungo la linea di vista z si trova $n(\rho)$:

$$n(\rho) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{vol}(r) dz = \frac{Q_d}{4\pi\sqrt{2a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(\rho^2+z^2)^{5/4}} = \frac{Q_d}{4\pi\sqrt{2a}} \frac{1}{\rho^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{5/4}} \quad (14)$$

Nella Eq. (14), sotto il simbolo di integrale, è stato fatto il cambio di variabili $x = z/\rho$. L'integrale definito in dx è un numero di cui non ci interessa il valore, quello che conta per noi è la dipendenza da ρ . Quindi, per il numero di particelle lungo la linea di vista, possiamo semplicemente scrivere:

$$n(\rho) = K \frac{1}{\rho^{3/2}} \quad (15)$$

Nella Eq. (15) K è una costante numerica, ma quello che è importante è la dipendenza dal campo di vista ρ . Mentre per una chioma con velocità costante delle particelle di polvere $n(\rho) \propto 1/\rho$ (vedi Eq. (5b)), nel caso della chioma con particelle accelerate $n(\rho) \propto 1/\rho^{3/2}$, ossia **il numero di particelle visibili per unità di superficie decresce più rapidamente all'aumentare di ρ rispetto al caso con velocità costante**. Per avere il numero di particelle $N(\rho)$ all'interno del campo di vista basta integrare su ρ come abbiamo fatto per l'Eq. (6):

$$N(\rho) = \int_0^\rho n(\rho) 2\pi\rho d\rho = \int_0^\rho 2\pi\rho \frac{K}{\rho^{3/2}} d\rho = K' \int_0^\rho \rho^{-1/2} d\rho = K' \rho^{1/2} \propto \rho^{1/2} \quad (16)$$

Se $N(\rho) \propto \rho^{1/2}$ allora $f \propto \rho^{-3/2}$, quindi $Af\rho \propto \rho \cdot \rho^{-3/2} = \rho^{-1/2}$. In sostanza $Af\rho$, invece di essere costante come nel caso della chioma con particelle che si muovono a velocità costante, per una chioma con particelle di polvere uniformemente accelerate **diminuisce come l'inverso della radice quadrata di ρ** . Questo è l'andamento che ci si può aspettare quando si misura $Af\rho$ per valori di ρ circa superiori ai 10^5 km.

Nella **parti più vicine al nucleo** cometario le particelle possono essere **talmente dense da saturare il campo di vista**, come nel caso della cometa Hale-Bopp (Fink e Rubin, 2012). In questo caso il numero di particelle per unità di superficie lungo la linea di vista sarà costante, ossia $n(\rho) \propto \text{cost}$, indipendentemente dal loro stato di moto. Il numero di particelle all'interno del campo di vista sarà $N(\rho) \propto \rho^2$, quindi $f \propto \text{cost}$. Di conseguenza $Af\rho \propto \rho$, ossia **all'aumentare del campo di vista $Af\rho$ tende ad aumentare linearmente con ρ** . Come si vede, al di fuori del regime a velocità costante e a bassa densità superficiale, $Af\rho$ dipende fortemente dal valore del campo di vista e non può più essere considerato una quantità universale. Anche il cattivo seeing o difetti ottici del telescopio possono allargare la PSF del falso nucleo contribuendo ad un effetto – in questo caso fittizio - di saturazione della coma che porta alla dipendenza lineare di $Af\rho$.

Riassumendo, si possono identificare tre tipi di andamento per la quantità $Af\rho$ all'aumentare progressivo del campo di vista ρ all'interno della chioma: 1) **lineare**, per le regioni più vicine al nucleo; 2) **costante**, quando i granelli sono abbastanza lontani dal nucleo da non saturare il campo di vista e si muovono a velocità costante; 3) **decrescente**, quando i granelli di polvere non saturano il campo di vista e vengono sensibilmente accelerati dalla pressione della radiazione solare. L'andamento qualitativo che ci si può

attendere per $Af\rho$ all'aumentare di ρ è riportato nella Fig. 4. Il valore di $Af\rho$ che caratterizza il nucleo è quello della parte costante.

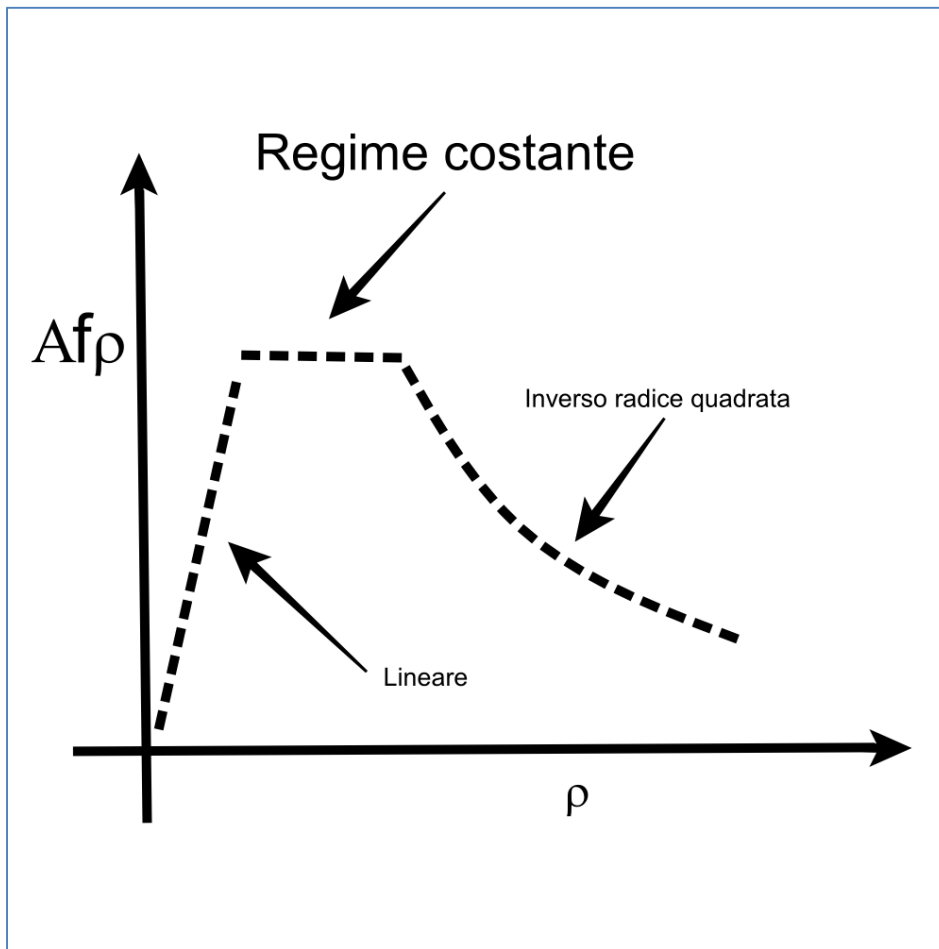


Figura 4 – Andamento qualitativo di $Af\rho$ all'aumentare del campo di vista ρ . La parte lineare corrisponde alla parte più densa della chioma dove la densità superficiale della chioma tende a saturare, quella costante (che caratterizza la cometa) ai granelli di polvere che si muovono con velocità costante infine, la parte decrescente, corrisponde alla regione della chioma in cui i granelli di polvere sono accelerati sensibilmente dalla pressione della radiazione solare.

Conclusioni

In questo breve articolo è stato illustrato il significato fisico, i limiti e un esempio di calcolo di $Af\rho$, una quantità utile per la caratterizzazione dell'emissione di polvere delle comete. In particolare ne è stato illustrato l'andamento qualitativo in funzione della distanza dal nucleo.

Gli appassionati di astronomia che volessero cimentarsi in questo tipo di misure possono fare riferimento al CARA Project (Cometary ARchive for Afrho) della Sezione Comete dell'Unione Astrofili Italiani².

² <http://cara.uai.it/home>

Bibliografia

A'Hearn, Feldman, Millis and Thompson, Comet Bowel 1980b, The Astronomical Journal, Vol. 89, 579-591, 1984.

Betzler, A. S.; de Sousa, O. F.; Diepvens, A.; Bettio, T. M., BVR photometry of comets 63P/Wild 1 and C/2012 K1 (PANSTARRS), Astrophysics and Space Science, Volume 365, 2020.

<https://doi.org/10.1007/s10509-020-03814-5>

Fink, U., Rubin, M., The calculation of Afp and mass loss rate for comets, Icarus, 221, 721-734, 2012.

<https://doi.org/10.1016/j.icarus.2012.09.001>

Jewitt, D., Luu, J.: A CCD portrait of Comet P/Tempel 2. Astron. J. **97**, 1766–1790, 1989.

<https://doi.org/10.1086/115118>